

Total number of printed pages-23

3 (Sem-1/CBCS) MAT HG/RC

2021

(Held in 2022)

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

For Honours Generic

Attempt either MAT-HG-1016 or MAT-HG-1026

For Regular

Attempt MAT-RC-1016

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

OPTION-A

Paper : MAT-HG-1016/MAT-RC-1016

(Calculus)

Full Marks : 80

Time : Three hours

Contd.

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$.

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Write the domain and range of the function $f(x) = \cos^{-1} x$.

$f(x) = \cos^{-1} x$ ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ লিখা।

(b) Find the value of the function $\sin^2 \frac{3\pi}{8}$.

ফলন $\sin^2 \frac{3\pi}{8}$ ৰ মান উলিওৱা।

(c) Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{x+3}{x}}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{x+3}{x}}$ ৰ মান উলিওৱা।

(d) State whether the statement is true or false :

The function $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ 1-x & , x > 0 \end{cases}$

is continuous at $x = 0$.

তলৰ উক্তিটো সচা নে মিছা লিখা :

ফলন $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ 1-x & , x > 0 \end{cases}$

$x = 0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(e) What is the n th derivative of e^{ax+b} ?

e^{ax+b} ৰ n -তম অৱকলজটো কি?

(f) Expand $e^{\sin x}$ in powers of x by using Maclaurin's infinite series.

মেক্‌লৰিন'ৰ অসীম শ্ৰেণীটো ব্যৱহাৰ কৰি $e^{\sin x}$ ক x ৰ ঘাতত প্ৰসাৰ কৰা।

(g) If $f(x) = x(x-1)$, then on what interval the function f is decreasing ?

যদি $f(x) = x(x-1)$ হয়, তেন্তে f ফলনটো কি অন্তৰালত হ্রাসমান হব?

(h) State whether the statement is true or false :

"Every differentiable function is continuous."

তলৰ উক্তিটো সচা নে মিছা লিখা :

"প্ৰত্যেক অৱকলন ফলন অবিচ্ছিন্ন।"

(i) Given a function U that satisfies

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq U(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} \text{ for all } x \neq 0, \text{ find}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x).$$

ফলন U এনে ধৰণে দিয়া আছে, যাতে

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq U(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} \text{ য'ত সকলো } x \neq 0$$

তেন্তে $\lim_{x \rightarrow 0} U(x)$ উলিওঁৱা।

(j) State whether the statement is true or false :

The slope of the tangent line to the

curve $y = x^2 + 4x + 7$ at $x = 1$ is 6.

তলৰ উক্তিটো সচাঁ নে মিছা লিখা :

$x = 1$ ত $y = x^2 + 4x + 7$ বক্ৰৰ স্পৰ্শকৰ প্ৰৱৰ্ত্তা 6।

2. Answer the following questions : $2 \times 5 = 10$
তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Evaluate $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

$\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ ৰ মান উলিওঁৱা।

(b) Let $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + \cos x & \text{if } x \neq 0 \\ 2 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

Show that $f(x)$ is continuous at $x = 0$.

ধৰা হ'ল, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + \cos x & \text{যদি } x \neq 0 \\ 2 & \text{যদি } x = 0 \end{cases}$

দেখুওঁৱা যে $f(x)$, $x = 0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(c) If $y = \sin^{-1} x$, prove that

$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$$

যদি $y = \sin^{-1} x$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$$

(d) If $u = x^2y + y^2z + z^2x$, then find the

value of $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$.

যদি $u = x^2y + y^2z + z^2x$, তেন্তে

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Evaluate (মান নির্ণয় কৰা) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\log(1+x)}$$

3. Answer **any four** questions : $5 \times 4 = 20$
যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) If $y = (x^2 - 1)^n$, prove that

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1)y_n = 0.$$

Hence deduce that if $P_n = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$,

$$\text{then } \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right\} + n(n+1)P_n = 0$$

$3+2=5$

যদি $y = (x^2 - 1)^n$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1)y_n = 0$$

ইয়াৰ পৰা সাব্যস্ত কৰা যে, যদি

$$P_n = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \text{ তেন্তে}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right\} + n(n+1)P_n = 0$$

(b) State Rolle's theorem and verify it for the function $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$ in $[-3, 0]$. $2+3=5$

ৰ'লেৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখা আৰু সত্যতা f ফলনৰ বাবে $[-3, 0]$ অন্তৰালত পৰীক্ষা কৰা য'ত

$$f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$$

(c) Evaluate, using L'Hospital's rule :

এল' হ'চপিতাল নীতি প্ৰয়োগ কৰি মান নির্ণয় কৰা :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \quad 5$$

(d) Using definition find $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\text{if } u = \log(x^2 + y^2). \quad 5$$

যদি $u = \log(x^2 + y^2)$, তেন্তে সূত্র প্ৰয়োগ কৰি

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{ ৰ মান উলিওৱা।}$$

(e) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, show

$$\text{that } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}. \quad 5$$

যদি $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, দেখুওঁৱা

$$\text{যে } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$$

(f) Show that the area of triangle ABC is $\frac{1}{2} ab \sin C$. 5

দেখুওঁৱা যে ABC ত্ৰিভুজৰ ফালি $\frac{1}{2} ab \sin C$

4. Answer **either** [(a) and (b)] **or** [(c) and (d)]:
[(a) আৰু (b)] অথবা [(c) আৰু (d)] অংশৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Find the value of θ in the mean value theorem

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h), 0 < \theta < 1$$

$$\text{for the function } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \quad 5$$

মধ্যমান উপপাদ্যটোত

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h), 0 < \theta < 1$$

$$\theta \text{ ৰ মান উলিওঁৱা য'ত } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

(b) If $u = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}$, prove that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad 5$$

যদি $u = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}$, প্রমাণ কৰা যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

(c) State Euler's theorem on homogeneous function and then verify for the function

$$f(x, y) = \frac{x(x^3 - y^3)}{x^3 + y^3} \quad 1+4=5$$

সুষম ফলনৰ ইউলাৰৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখা আৰু ইয়াৰ সত্যতা f ফলনৰ বাবে পৰীক্ষা কৰা য'ত

$$f(x, y) = \frac{x(x^3 - y^3)}{x^3 + y^3}$$

(d) Prove that (প্রমাণ কৰা) :

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \quad x > 0 \quad 5$$

5. Prove that the double limit exist but repeated limits do not exist for the function

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad 10$$

Contd.

প্রমাণ কৰা যে ফলন f ৰ দ্বিসীমা স্থিত হয়, কিন্তু পুনৰাবৃত্তী সীমা স্থিত নহয়, য'ত

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Or/ অথবা

Find infinite series of $\log(1+x)$ for $|x| < 1$ using Maclaurin's theorem. 10

মেক্লেৰিনৰ উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰি $\log(1+x)$, $|x| < 1$ ৰ অসীম শ্ৰেণীটো নিৰ্ণয় কৰা।

6. Answer **either** [(a) and (b)] **or** [(c) and (d)]:
[(a) আৰু (b)] অথবা [(c) আৰু (d)] অংশৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If (যদি) $y = e^{a \sin^{-1} x}$ prove that (প্রমাণ কৰা যে) —

(i) $(1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$

(ii) $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$
2+3=5

(b) Show that, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$
0, $x = 0$
is differentiable at $x = 0$ and find $f'(0)$.
3+2=5

দেখুউৱা যে, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$
0, $x = 0$

$x = 0$ বিন্দুত অৱকলন আৰু $f'(0)$ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) A triangle has sides $a = 3$ units, $b = 4$ units and angle $C = 90^\circ$. Find the length of the side c . 5

এটা ত্ৰিভুজত $a = 3$ একক, $b = 4$ একক আৰু $\angle C = 90^\circ$ । c বাহুৰ দৈৰ্ঘ্যৰ মান উলিওঁৱা।

(d) Evaluate **any two** of the following :
2½×2=5

যিকোনো দুটাৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \sin x}{3 \cos x}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sec 2x}{3x}$

7. Answer **either** [(a) and (b)] **or** [(c) and (d)]:
 [(a) আৰু (b)] অথবা [(c) আৰু (d)] অংশৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Prove that (প্ৰমাণ কৰা) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{1/x^2} = e^{1/3} \quad 6$$

(b) Show that, $f(x) = \begin{cases} |x-a| & , x \neq a \\ 1 & , x = a \end{cases}$

is discontinuous at $x = a$. 4

দেখুওৱা যে, $f(x) = \begin{cases} |x-a| & , x \neq a \\ 1 & , x = a \end{cases}$

$x = a$ বিন্দুত অনবিচ্ছিন্ন।

(c) Show that (দেখুওৱা) :

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \text{ for } x > 0 \quad 6$$

(d) Consider the function

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6.$$

Find the function which

- (i) shifts the graph of f two units up;
- (ii) shifts the graph of f one unit to the left;

(iii) stretches the graph of f vertically by a factor 3;

(iv) compresses the graph of f horizontally by a factor 2. 4

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6$ হলে, তলৰ ফলন কেইটা নিৰ্ণয় কৰা :

(i) f ফলনটোৰ লেখটোক ২ একক ওপৰলৈ স্থানান্তৰ কৰা;

(ii) f ফলনটোৰ লেখটোক এক একক বাওঁফালে স্থানান্তৰ কৰা;

(iii) f ফলনটোৰ লেখটোক তিনি গুণ উলম্বভাৱে প্ৰসাৰিত কৰা;

(iv) f ফলনটোৰ লেখটোক দুই গুণ আনুভূমিকভাৱে সংকুচিত কৰা।